Formules de Taylor

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$
Si f est $\underline{\mathcal{C}^n \text{ sur } I}$,
Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a et

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(h^n)}$$

Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$
Si f est $\underline{\mathcal{C}^{n+1} \text{ sur } I}$,

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t}$$

Taylor-Lagrange

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Si f est $\underline{\mathcal{C}^{n+1} \text{ sur } [a, b]}$,
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\boxed{f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$
Si f est $\underline{\mathcal{C}^{n+1} \text{ sur } I}$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\underline{\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M},$$

$$\boxed{\forall x \in I, \left| f(x) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Taylor dans les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$,

$$\boxed{P(X) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}$$